

Hong Kong Mathematics Olympiad (2002 – 2003)

Heat Event (Individual)

香港数学竞赛 (2002 – 2003)

初赛项目(个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 设  $f$  是一函数，使对所有整数  $m$  及  $n$ ， $f(m)$  是整数及  $f(mn) = f(m)f(n)$ 。已知当  $9 > m > n$  时， $f(m) > f(n)$ ，且  $f(2) = 3$  及  $f(6) > 22$ ，求  $f(3)$  的值。

Let  $f$  be a function such that for all integers  $m$  and  $n$ ， $f(m)$  is an integer and  $f(mn) = f(m)f(n)$ . It is given that  $f(m) > f(n)$  when  $9 > m > n$ ， $f(2) = 3$  and  $f(6) > 22$ , find the value of  $f(3)$ .

2. 若  $P = \frac{1}{4}$ ，求  $P \log_2 P$  的值。

If  $P = \frac{1}{4}$ , find the value of  $P \log_2 P$ .

3. 若  $0 \leq x \leq 1$ ，求  $\left[ \log_{10} \left( \frac{99999x+1}{1000} \right) \right]^2$  的最大值。

If  $0 \leq x \leq 1$ , find the maximum value of  $\left[ \log_{10} \left( \frac{99999x+1}{1000} \right) \right]^2$ .

4. 已知 0 及 1 是二次方程  $a(x+1)(x+2) + b(x+2)(x+3) + c(x+3)(x+1) = 0$  的根。若  $k = \frac{a}{b}$ ，求  $k$  的值。

Given that a quadratic equation  $a(x+1)(x+2) + b(x+2)(x+3) + c(x+3)(x+1) = 0$  has roots 0 and 1, and  $k = \frac{a}{b}$ , find the value of  $k$ .

5. 课室内有  $n$  个人，若每个人恰好跟其他人各握手一次，则共有 28 次握手，求  $n$  的值。

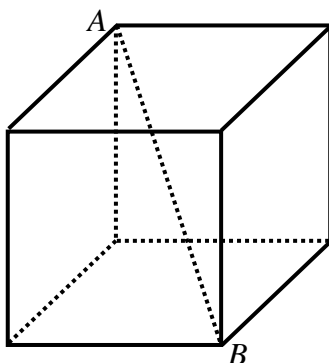
There are  $n$  persons in the classroom. If each person in the classroom shakes hands exactly once with each other person in the classroom and there are altogether 28 handshakes. Find the value of  $n$ .

6. 若对任意  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ， $\cot \frac{1}{4}x - \cot x \equiv \frac{\sin kx}{\left(\sin \frac{1}{4}x\right)(\sin x)}$ ，其中  $k$  是一常数，求  $k$  的值。

If for any  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ， $\cot \frac{1}{4}x - \cot x \equiv \frac{\sin kx}{\left(\sin \frac{1}{4}x\right)(\sin x)}$ ，where  $k$  is a constant，find the value of  $k$ .

7. 图一中，正方体的对角线  $AB$  的长度是  $\sqrt{12}$  cm。若该正方体的体积是  $M \text{ cm}^3$ ，求  $M$  的值。

In Figure 1,  $AB$  is a diagonal of the cube and  $AB = \sqrt{12}$  cm. If the volume of the cube is  $M \text{ cm}^3$ ，find the value of  $M$ .

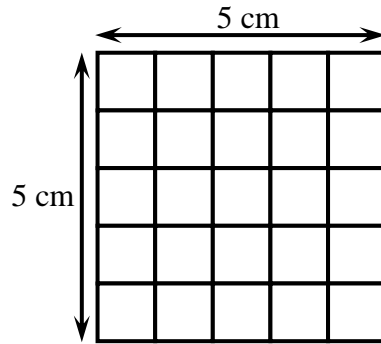


图一

Figure 1

8. 图二中，一个面积为  $25 \text{ cm}^2$  的正方形被分成 25 个边长为 1 cm 的小正方形。若图中共有  $K$  个不同的正方形，求  $K$  的值。

In Figure 2, a square with area equal to  $25 \text{ cm}^2$  is divided into 25 small squares with side length equal to 1 cm. If the total number of different squares in the figure is  $K$ ，find the value of  $K$ .



图二

Figure 2

9. 已知六位数  $N = x1527y$  是 4 的倍数, 且  $N$  被 11 除余 5。求  $x+y$  的值。

It is given that the 6-digits number  $N = x1527y$  is a multiple of 4, and the remainder is 5 when  $N$  is divided by 11. Find the value of  $x+y$ .

10. 一个三角形的三边长分别是 7.5 cm、11 cm 和  $x$  cm。若  $x$  为整数, 求  $x$  的最小值。

The sides of a triangle have lengths 7.5 cm, 11 cm and  $x$  cm respectively. If  $x$  is an integer, find the minimum value of  $x$ .